

**Licence mention Mathématiques - Semestre 4**

**Probabilités 1**

**Examen du lundi 17 mai 2010**

*Durée 2h00*

*Document joint : tableaux des variables aléatoires usuelles, tables de la loi Normale*

*Tout autre document interdit - Calculatrices autorisées*

*Les 4 exercices sont indépendants*

**Exercice 1**    *Les questions 1) et 2) sont indépendantes*

Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport.

1) Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) du bus sur l'horaire officiel à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée  $X$ , exprimée en minutes (mn), qui suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ , avec  $\mu = 5$  et  $\sigma = 2$ .

a) Calculer la probabilité  $p$  que le retard soit inférieur à 7 mn ; on vérifiera que  $p = 0,8413$ .

b) Calculer la probabilité que le retard soit supérieur à 9 mn.

c) Sachant que le retard est supérieur à 3 mn, quelle est la probabilité qu'il soit inférieur à 7 mn ?

Un usager fréquente cette ligne de bus une fois par jour pendant  $n$  jours,  $n$  étant un entier naturel non nul. Chaque jour, cet usager se présente à la station à l'horaire officiel où le bus est censé arriver. Si le bus est là, l'usager monte dedans ; sinon, le bus est en retard et l'usager attend. On suppose que les retards journaliers du bus sont indépendants. On suppose construit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  adapté à cette expérience aléatoire.

d) On désigne par  $Y$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où cet usager a attendu moins de 7 mn. Donner, sans calcul mais en justifiant la réponse, la loi de probabilité de  $Y$ .

e) On désigne par  $Z$  la variable aléatoire réelle égale au rang du premier jour (s'il existe) où cet usager a attendu moins de 7 mn ; s'il n'y a que des retards de plus de 7 mn, alors  $Z = 0$ .

Déterminer la loi de probabilité de  $Z$ . Pour justifier la réponse, on pourra utiliser les événements  $A_i$  : "l'usager a attendu moins de 7 mn le  $i^{\text{ème}}$  jour", pour  $i = 1, \dots, n$ .

2) Le nombre d'appels reçus par le standard d'une société de taxis pendant une période de durée  $t$  est une variable aléatoire  $Y_t$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ ,  $\lambda$  étant une constante réelle strictement positive. Une origine de temps étant choisie, on note  $T$  la variable aléatoire réelle représentant le temps d'attente du premier appel vers ce standard. Par convention,  $P(T \leq t) = 0$  pour tout réel  $t < 0$ .

a) Rappeler l'expression de la probabilité de l'événement  $[Y_t = k]$  pour tout entier naturel  $k$ , ainsi que l'espérance et la variance de  $Y_t$ .

b) On rappelle que la fonction génératrice  $G_{Y_t}$  de  $Y_t$  est définie par l'expression  $G_{Y_t}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$ , avec  $p_k = P(Y_t = k)$ , lorsque cette série converge.

Calculer  $G_{Y_t}(x)$  pour tout réel  $x$ . Retrouver, en justifiant, l'espérance de  $Y_t$ .

c) Justifier l'égalité des deux événements  $[Y_t = 0]$  et  $[T > t]$  pour tout réel  $t > 0$ .

d) En déduire, pour  $t > 0$ , la probabilité de l'événement  $[T > t]$ , puis celle de l'événement  $[T \leq t]$ .

e) Expliciter alors la fonction de répartition  $F_T$  de  $T$ , et en déduire une densité de probabilité  $f_T$  de  $T$ .

Reconnaître une loi usuelle ; en déduire (sans calcul) l'espérance  $E(T)$  et la variance  $V(T)$  de  $T$ .

## Exercice 2

On considère que le nombre de lapins (des deux sexes) engendrés par une lapine issue d'un élevage de laboratoire est une variable aléatoire  $S$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et dont la loi de probabilité est donnée par

$P(S = n) = pq^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Justifier que les paramètres  $p$  et  $q$  doivent vérifier les conditions  $p \in ]0, 1[$ ,  $q \in ]0, 1[$  et  $p + q = 1$ .
- 2) Jane est une lapine issue de cet élevage. Calculer, en fonction de  $p$  et/ou  $q$ , la probabilité :
  - a) qu'elle n'engendre aucun lapin ;
  - b) qu'elle en engendre au moins 20.
- 3) Soit  $X$  le nombre de lapins femelles et  $Y$  le nombre de lapins mâles engendrés par Jane ; on a donc  $S = X + Y$ . On suppose que pour tout entier naturel  $n$ , la loi de probabilité de  $X$  conditionnelle à  $(S = n)$  est donnée par  $P(X = k / S = n) = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ , pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , où les paramètres positifs  $a$  et  $b$  ne dépendent pas de  $n$  et vérifient l'égalité  $a + b = 1$ .
  - a) Interpréter cette loi conditionnelle et la signification des paramètres  $a$  et  $b$ .
  - b) Que vaut  $P(X = k / S = n)$  pour  $n < k$  ? Justifier.
- 4) On rappelle que pour tout entier naturel  $k$  fixé et pour tout  $x \in ]-1, +1[$ ,
$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$
  - a) Calculer  $P(X = k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
  - b) En déduire que la loi de probabilité de  $X$  est du même type que celle de  $S$  mais avec des paramètres différents que l'on précisera.
- 5) Par analogie et sans calcul, donner la loi de probabilité de  $Y$ .

## Exercice 3

Soient  $X$  une variable aléatoire réelle de loi Uniforme sur l'intervalle réel  $]0, 1]$ ,  $q$  un réel dans  $]0, 1[$  et  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = 1 + \left\lfloor \frac{\ln X}{\ln q} \right\rfloor$ , où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ .

- 1) Rappeler l'expression de la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .
- 2) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de  $Y$ .
- 3) Déterminer la loi de probabilité de  $Y$ . Reconnaître une loi usuelle.

## Exercice 4

- 1) On considère une variable aléatoire réelle  $U$  dont une densité de probabilité est la fonction  $f_U$  définie par  $f_U(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ 
  - a) Justifier que  $f_U$  est bien une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .
  - b) Montrer que  $U$  admet une espérance mathématique que l'on calculera. Que représente cette valeur ?
- 2) Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles dont une densité est donnée par :
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
  - a) Justifier que  $f_{(X,Y)}$  est bien une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}^2$ .
  - b) Déterminer une densité de probabilité marginale de  $X$ .
  - c) Pour  $x > 0$ , déterminer une densité de  $Y$  conditionnelle à  $X = x$  ; reconnaître une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
  - d) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
  - e) Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

**Tableau des variables aléatoires discrètes usuelles**

| Nom                                                    | Loi de probabilité                                                                                                      | Espérance         | Variance                                                         |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|------------------------------------------------------------------|
| Uniforme sur<br>$\{1, 2, \dots, n\}$                   | $P(X = k) = \frac{1}{n}$<br>$k \in \{1, 2, \dots, n\}$                                                                  | $\frac{n+1}{2}$   | $\frac{n^2-1}{12}$                                               |
| Binomiale<br>$\mathcal{B}(n, p)$                       | $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$<br>$k \in \{0, 1, \dots, n\}$                                                        | $np$              | $np(1-p)$                                                        |
| Hypergéométrique<br>$\mathcal{H}(N, n, \frac{N_1}{N})$ | $P(X = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$<br>$k$ compris entre<br>$\max(0, n - (N - N_1))$ et $\min(N_1, n)$ | $n \frac{N_1}{N}$ | $n \frac{N_1}{N} \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$ |
| Pascal<br>$\mathcal{P}(r, p)$                          | $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$<br>$k \in \{r, r+1, \dots\}$                                                 | $\frac{r}{p}$     | $\frac{r(1-p)}{p^2}$                                             |
| Poisson<br>$\mathcal{P}(\lambda)$                      | $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$<br>$k \in \mathbb{N}$                                                    | $\lambda$         | $\lambda$                                                        |

Loi de Bernoulli : Binomiale  $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$

Loi Géométrique : Pascal  $\mathcal{P}(1, p) = \mathcal{G}(p)$

**Tableau des variables aléatoires à densité usuelles**

| Nom                                   | Densité de probabilité                                                                                                                                                                                                        | Espérance                              | Variance                                                           |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Uniforme sur<br>[a, b]                | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$                                                                                                                  | $\frac{a+b}{2}$                        | $\frac{(b-a)^2}{12}$                                               |
| Normale<br>$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$                                                                                                                                      | $\mu$                                  | $\sigma^2$                                                         |
| Chi-deux<br>$\chi_2(n)$               | $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$                                                               | $n$                                    | $2n$                                                               |
| Student<br>$S(n)$                     | $f(x) = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}}{\sqrt{n} \beta(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})}$                                                                                                                  | $0$<br>si $n \geq 2$                   | $\frac{n}{n-2}$<br>si $n \geq 3$                                   |
| Fisher<br>$F(n_1, n_2)$               | $f(x) = \begin{cases} \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\beta(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}) (n_1 x + n_2)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ | $\frac{n_2}{n_2-2}$<br>si $n_2 \geq 3$ | $\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$<br>si $n_2 \geq 5$ |
| Exponentielle<br>$Exp(\theta)$        | $f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$                                                                                                                         | $\frac{1}{\theta}$                     | $\frac{1}{\theta^2}$                                               |
| Cauchy<br>$C(\mu, \lambda)$           | $f(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + (x-\mu)^2)}$                                                                                                                                                                           |                                        |                                                                    |
| Gamma<br>$G(a, p)$                    | $f(x) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$                                                                                                        | $\frac{p}{a}$                          | $\frac{p}{a^2}$                                                    |
| Beta<br>$B(p, q)$                     | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$                                                                                      | $\frac{p}{p+q}$                        | $\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$                                        |

**TABLE 1**

**Fonction de répartition  
de la loi normale réduite**

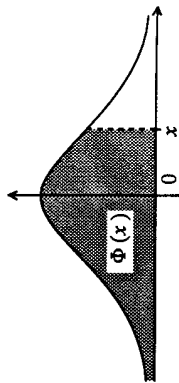
Si  $U$  suit la loi normale réduite, pour  $x \geq 0$ , la table donne la valeur :

$$\Phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur  $x$  s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour  $x < 0$ , on a :

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$



| $x$ | 0,00   | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |

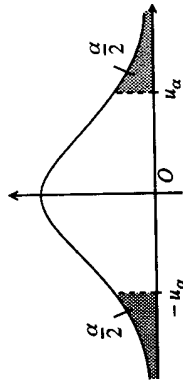
**TABLE 2**

**Loi normale réduite  
(table de l'écart réduit)**

Si  $U$  est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour  $\alpha$  choisi, la valeur  $u_\alpha$  telle que :

$$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha.$$

La valeur  $\alpha$  s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.



| $\alpha$ | 0,00     | 0,01  | 0,02  | 0,03  | 0,04  | 0,05  | 0,06  | 0,07  | 0,08  | 0,09  |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0      | $\infty$ | 2,576 | 2,326 | 2,170 | 2,054 | 1,960 | 1,881 | 1,812 | 1,751 | 1,695 |
| 0,1      | 1,645    | 1,598 | 1,555 | 1,514 | 1,476 | 1,440 | 1,405 | 1,372 | 1,341 | 1,311 |
| 0,2      | 1,282    | 1,254 | 1,227 | 1,200 | 1,175 | 1,150 | 1,126 | 1,103 | 1,080 | 1,058 |
| 0,3      | 1,036    | 1,015 | 0,994 | 0,974 | 0,954 | 0,935 | 0,915 | 0,896 | 0,878 | 0,860 |
| 0,4      | 0,842    | 0,824 | 0,806 | 0,789 | 0,772 | 0,755 | 0,739 | 0,722 | 0,706 | 0,690 |
| 0,5      | 0,674    | 0,659 | 0,643 | 0,628 | 0,613 | 0,598 | 0,583 | 0,568 | 0,553 | 0,539 |
| 0,6      | 0,524    | 0,510 | 0,496 | 0,482 | 0,468 | 0,454 | 0,440 | 0,426 | 0,412 | 0,399 |
| 0,7      | 0,385    | 0,372 | 0,358 | 0,345 | 0,332 | 0,319 | 0,305 | 0,292 | 0,279 | 0,266 |
| 0,8      | 0,253    | 0,240 | 0,228 | 0,215 | 0,202 | 0,189 | 0,176 | 0,164 | 0,151 | 0,138 |
| 0,9      | 0,126    | 0,113 | 0,100 | 0,088 | 0,075 | 0,063 | 0,050 | 0,038 | 0,025 | 0,013 |